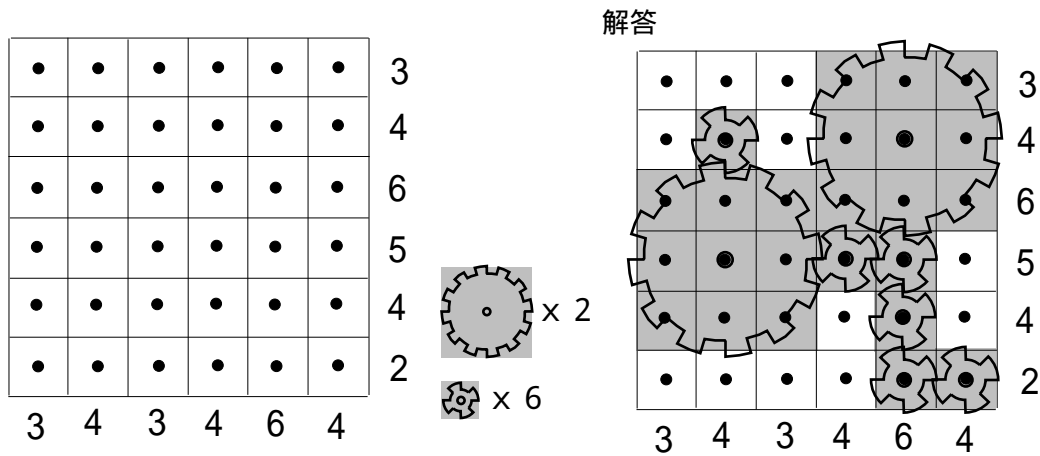


Cogwheels

<http://puzzlepicnic.com/>

例題 (Genres Cogwheels Maarten, January 14, 2007より)



ルール

盤の右下に指定された個数の歯車を配置する。

歯車は全体が噛み合い、どれか1個を回転すれば全部が回転する。

歯車は中心軸線が接し、重ならないときのみ噛み合う。

盤の右側の数字は、1行の内で歯車に覆われるマス数を、下側の数字は1列の内で、

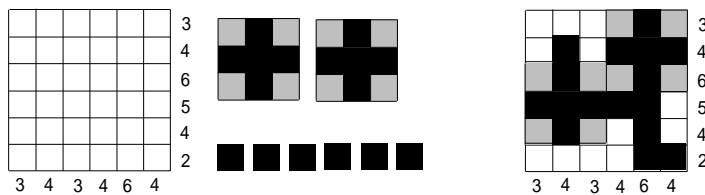
歯車に覆われるマス数を表す。

(<http://puzzlepicnic.com/> より)

この例題では必要ないが、上記Webサイトの正解に合わせるためには、ルールをもう一つ追加する必要がある。

歯車は2 × 2の4個塊で噛み合わせてはならない。

このパズルは歯車を考える必要はなく、次のようなパズルと考えてよい。



与えられた数の、1 × 1、3 × 3または5 × 5マスの正方形のコマを配置する。

コマが置かれたマス数は、右欄、下欄の数字に合わせる。

ただし、その中心を通る十字マスは全てつながっていなければならない。

行番号をI、列番号をJとする。歯車には番号を振っておく (K=1~8まで)。

		列番号 J					
		1	2	3	...	Nc	
行番号 I	1						
	2						
	3						
	...						
	...						
	Nr						

変数

$C(I, J, K) = 1$	マス(I, J)に歯車Kの中心が置かれるとき
$= 0$	" 置かれないとき
$B(I, J) = 1$	マス(I, J)が歯車で覆われるとき (灰色マス)
$= 0$	" 覆われないとき
$W(I, J) = 1$	マス(I, J)が歯車で覆われないとき (白マス)
$= 0$	" 覆われるとき
$P(I, J) = 1$	マス(I, J)が歯車の十字線マスとき (黒マス)
$= 0$	" 十字線マスでないとき
$S(I, J) = 1$	マス(I, J)が1 x 1 歯車のマスとき
$= 0$	" でないとき
$U(I, J) = 1$	P(I, J)に付けた矢印が上向きするとき
$= 0$	" でないとき
$D(I, J) = 1$	P(I, J)に付けた矢印が下向きするとき
$= 0$	" でないとき
$L(I, J) = 1$	P(I, J)に付けた矢印が左向きするとき
$= 0$	" でないとき
$R(I, J) = 1$	P(I, J)に付けた矢印が右向きするとき
$= 0$	" でないとき

目的関数

$$\text{minimize } x \quad (\text{ダミー})$$

制約式

subject to

- 1 . マスは灰色マスまたは白マスである

$$B(I, J) + W(I, J) = 1 \quad \begin{matrix} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \end{matrix}$$

- 2 . 各行の灰色マスの数

$$\sum_{J=1}^{Nc} B(I, J) = \text{盤右欄数字} \quad (I=1, 2, \dots, Nr)$$

- 3 . 各列の灰色マスの数

$$\sum_{I=1}^{Nr} B(I, J) = \text{盤下欄数字} \quad (J=1, 2, \dots, Nc)$$

- 4 . 灰色マスはどれかの歯車に属する

$$B(I, J) = \sum_{K=1}^{Ng} \left\{ C(I, J, K) + \sum_{I1=I-1}^{I+1} \sum_{JJ=J-1}^{J+1} C(I1, JJ, K) + \sum_{I1=I-2}^{I+2} \sum_{JJ=J-2}^{J+2} C(I1, JJ, K) \right\} \quad \begin{matrix} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \\ Ng \text{は歯車の総数} \end{matrix}$$

\swarrow Kが1 x 1 歯車のとき
 \swarrow Kが3 x 3 歯車のとき
 \swarrow Kが5 x 5 歯車のとき

5 . 歯車は1個ずつある

$$\sum_{I=1}^{Nr} \sum_{J=1}^{Nc} C(I, J, K) = 1 \quad (K=1, 2, \dots, Ng)$$

6 . 大きな歯車の中心は盤の外枠近くにはない

Kが3×3歯車のとき

$$\sum_{J=1}^{Nc} C(1, J, K) = 0$$

$$\sum_{J=1}^{Nc} C(Nr, J, K) = 0$$

$$\sum_{I=1}^{Nr} C(I, 1, K) = 0$$

$$\sum_{I=1}^{Nr} C(I, Nc, K) = 0$$

Kが5×5歯車のとき

$$\sum_{J=1}^{Nc} \{C(1, J, K) + C(2, J, K)\} = 0$$

$$\sum_{J=1}^{Nc} \{C(Nr-1, J, K) + C(Nr, J, K)\} = 0$$

$$\sum_{I=1}^{Nr} \{C(I, 1, K) + C(I, 2, K)\} = 0$$

$$\sum_{I=1}^{Nr} \{C(I, Nc-1, K) + C(I, Nc, K)\} = 0$$

7 . 歯車のタテヨコ十字マスをP(I, J)=1とする

Kが1×1歯車のとき

$$C(I, J, K) = P(I, J) \quad (I=1, 2, \dots, Nr)$$

Kが3×3歯車のとき

$$C(I, J, K) = P(I, J) \quad (J=1, 2, \dots, Nc)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J) \quad (K=1, 2, \dots, Ng)$$

$$C(I, J, K) = P(I-1, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J-1)$$

$$C(I, J, K) = P(I+1, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J+1)$$

$$P(I-1, J-1) + P(I+1, J-1) + P(I+1, J+1) + P(I-1, J+1) = \text{bigM} * \{1 - C(I, J, K)\}$$

Kが5×5歯車のとき

$$C(I, J, K) = P(I, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I-1, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I-2, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J-1)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J-2)$$

$$C(I, J, K) = P(I+1, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I+2, J)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J+1)$$

$$C(I, J, K) = P(I, J+2)$$

$$P(I-2, J-1) + P(I-2, J-2) + P(I-1, J-1) + P(I-1, J-2)$$

$$+ P(I+1, J-1) + P(I+1, J-2) + P(I+2, J-1) + P(I+2, J-2)$$

$$+ P(I+1, J+1) + P(I+1, J+2) + P(I+2, J+1) + P(I+2, J+2)$$

$$+ P(I-2, J+1) + P(I-2, J+2) + P(I-1, J+1) + P(I-2, J+2)$$

$$= \text{bigM} * \{1 - C(I, J, K)\}$$

7 . 白マスは, $P(I, J)=0$

$$P(I, J)+W(I, J) = 1 \quad \begin{array}{l} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \end{array}$$

8 . $P(I, J)=1$ のマスに矢印を付ける

ただし、 $K=1$ の歯車の中心を集水マスとする。

$$\begin{array}{ll} P(I, J) & U(I, J)+D(I, J)+L(I, J)+R(I, J)+\text{bigM}*C(I, J, 1) & (I=1, 2, \dots, Nr) \\ P(I, J)+\text{bigM}*C(I, J, 1) & U(I, J)+D(I, J)+L(I, J)+R(I, J) & (J=1, 2, \dots, Nc) \end{array}$$

9 . 外枠から飛び出す矢印はない

$$\begin{array}{l} \sum_{J=1}^{Nc} U(1, J) = 0 \\ \sum_{J=1}^{Nc} D(Nr, J) = 0 \\ \sum_{I=1}^{Nr} L(I, 1) = 0 \\ \sum_{I=1}^{Nr} R(I, Nc) = 0 \end{array}$$

10 . 矢印の先に矢印がつながる

$$\begin{array}{ll} L(I, J) & L(I, J-1)+D(I, J-1)+U(I, J-1)+\text{bigM}*C(I, J-1, 1) & (I=1, 2, \dots, Nr) \\ D(I, J) & D(I+1, J)+L(I+1, J)+R(I+1, J)+\text{bigM}*C(I+1, J, 1) & (J=1, 2, \dots, Nc) \\ R(I, J) & R(I, J+1)+D(I, J+1)+U(I, J+1)+\text{bigM}*C(I, J+1, 1) \\ U(I, J) & U(I-1, J)+L(I-1, J)+R(I-1, J)+\text{bigM}*C(I-1, J, 1) \end{array}$$

11 . 1×1 マス歯車のあるマスを $S(I, J)=1$ とする

$$C(I, J, K) = S(I, J) \quad \begin{array}{l} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \\ (K=1, 2, \dots, Ng) \end{array}$$

ただし、 K は 1×1 マス歯車のみ

$$\sum_{K=1}^{Ng} C(I, J, K) = S(I, J) \quad \begin{array}{l} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \end{array}$$

ただし、 K は 1×1 マス歯車のみ

12 . 1×1 マス歯車は4個塊で噛み合わない

$$S(I, J)+S(I+1, J)+S(I, J+1)+S(I+1, J+1) = 3 \quad \begin{array}{l} (I=1, 2, \dots, Nr-1) \\ (J=1, 2, \dots, Nc-1) \end{array}$$

この条件、 $P(I, J)$ に付ければ $S(I, J)$ という変数を定義しなくても済むと思われるが、 $P(I, J)$ に付けると、どういう訳か解析時間が長くなる。

上下界

bounds

変数型

binary

$$C(I, J, K) \quad \begin{array}{l} (I=1, 2, \dots, Nr) \\ (J=1, 2, \dots, Nc) \\ (K=1, 2, \dots, Ng) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} B(I, J) & W(I, J) & P(I, J) & S(I, J) & (I=1, 2, \dots, Nr) \\ U(I, J) & D(I, J) & L(I, J) & R(I, J) & (J=1, 2, \dots, Nc) \end{array}$$

終端

end