

Tapa

(プログ <http://buyaketa.blogspot.jp/2011/04/tapa.html>
puzzle note より)

例題

| | | | | | |
|----------------|---|--|--|----------------|---|
| | 5 | | | | 1 |
| | | | | | |
| 1 ₃ | | | | | |
| | | | | | 3 |
| | | | | | |
| 2 | | | | 1 ₂ | |

解答

| | | | | | |
|----------------|---|--|--|----------------|---|
| | 5 | | | | 1 |
| | | | | | |
| 1 ₃ | | | | | |
| | | | | | 3 |
| | | | | | |
| 2 | | | | 1 ₂ | |

ルール

以下の条件を満たすように、盤面のマス塗りつぶす。

マスの中の数字は、そのマスの周囲の最大8マスを順に見たときに、
黒マスが連続している長さを表す。

複数の数字がある場合は、それぞれが白マスで分かれていることを表す。
(数字が書いてある順序、位置に意味はない。)

数字の入っているマスは、黒マスにならない。

黒マスはタテヨコにひとつながりになる。

黒マスが2×2のカタマリになってはいけない。

黒マスをひとつながりにするため、黒マスに矢印を付け、集水マスに集める。
矢印には番号を振り、ループを避ける。
集水マス位置は変数とし、自動検索させる。

マスの行番号をI、列番号をJとし、数字入りのマスにも番号を振る。

| | | | | | | | |
|---|----|----------------|---|---|---|-----|----|
| | | J | | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | Nc |
| I | 1 | | 5 | | | | 1 |
| | 2 | | | | | | |
| | 3 | 1 ₃ | | | | | |
| | ⋮ | | | | | | |
| | Nr | | | | | | |

さらに、数字入りマスの周辺マス座標を定義する。

| | | |
|---|----|---|
| 8 | 7 | 6 |
| 1 | 数字 | 5 |
| 2 | 3 | 4 |

この数字がK番目の数字マスするとき

このマスの座標は(K,4)

変数

| | |
|-------------------------|--|
| $B(I,J) = 1$ $= 0$ | マス(I,J)が黒く塗られるとき " 塗られないとき |
| $W(I,J) = 1$ $= 0$ | マス(I,J)が白く塗られるとき " 塗られないとき |
| $T(K,L,M) = 1$ $= 0$ | K番目の数字マスのL個目の数字の塗り始め周囲座標がMのとき " でないとき |
| $C(I,J) = 1$ $= 0$ | マス(I,J)が集水マスのとき " でないとき |
| $bL(I,J) = 1$ $= 0$ | 黒マス(I,J)が左向き矢印を持つ(左黒マスと結合)とき " 持たないとき |
| $bD(I,J) = 1$ $= 0$ | 黒マス(I,J)が下向き矢印を持つとき " 持たないとき |
| $bR(I,J) = 1$ $= 0$ | 黒マス(I,J)が右向き矢印を持つとき " 持たないとき |
| $bU(I,J) = 1$ $= 0$ | 黒マス(I,J)が上向き矢印を持つとき " 持たないとき |
| $N(I,J) = K$ | 黒マス(I,J)がK番目の矢印のとき |

目的関数

minimize
x (ダミー)

制約式

subject to

1. マスは黒または白で塗られる

数字マス以外

$$B(I,J) + W(I,J) = 1 \quad (I=1, 2, \dots, Nr)$$

数字マス

$$(J=1, 2, \dots, Nc)$$

$$W(I,J) = 1$$

2. 数字マス周りの黒マス数の合計値

$$\sum_{I=1}^{Nr} \sum_{J=1}^{Nc} B(I,J) = \text{Sum}(K) \quad (K=1, 2, \dots, Nf)$$

Nfは数字マスの総数

(I,J)はK番目の数字マスの周囲マス

Sum(K)はK番目の数字マスの数字の合計

3. K番目の数字マスのL個目の数字の塗り始め位置は、周囲座標1~8のどこかにある

$$\sum_{M=1}^8 T(K,L,M) = 1 \quad (K=1, 2, \dots, Nf)$$

$$(L=1, 2, \dots, N(K))$$

N(K)はK番目の数字マス中の数字の個数

注) 周囲マスは8個として記述するが、辺または角では要調整

4 . 塗り始め位置は重ならない

$$\sum_{L=1}^{N(K)} T(K,L,M) = 1 \quad \begin{matrix} (K=1,2,\dots,Nf) \\ (M=1,2,\dots,8) \end{matrix}$$

5 . T(K,L,M)=1のとき黒く塗るマス

$$\begin{matrix} T(K,L,M) & B(I,J) & (K=1,2,\dots,Nf) \\ \vdots & & (M=1,2,\dots,8) \\ \vdots & & \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} T(K,L,M) \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} K \text{ 番目の数字マスの } L \text{ 番目の数字の個数並ぶ} \\ (I,J) \text{ は } K \text{ 番目の数字マスの座標から換算計算する} \end{matrix}$$

6 . T(K,L,M)=1のとき黒く塗るマスの頭と尻尾に白マスが付く

$$T(K,L,M) \quad B(I,J) \quad \begin{matrix} (K=1,2,\dots,Nf) \\ (L=1,2,\dots,N(K)) \\ (M=1,2,\dots,8) \end{matrix}$$

(I,J)はK番目の数字マスの周囲座標
 頭では(K,M-1)に相当する位置
 尻尾では(K,M+F(K,L))に相当する位置
 F(K,L)はK番目の数字マスのL番目の数字

7 . 黒マスは隣接している

$$B(I,J) = B(I-1,J)+B(I,J-1)+B(I+1,J)+B(I,J+1) \quad \begin{matrix} (J=1,2,\dots,Nc) \\ (I=1,2,\dots,Nr) \end{matrix}$$

8 . 黒マスは2 × 2のカタマリにならない

$$B(I,J)+B(I+1,J)+B(I+1,J+1)+B(I,J+1) = 3 \quad \begin{matrix} (J=1,2,\dots,Nc-1) \\ (I=1,2,\dots,Nr-1) \end{matrix}$$

9 . 黒マスには矢印が付く (集水マスを除く)

$$bL(I,J)+bR(I,J)+bU(I,J)+bD(I,J)+bM^*C(I,J) = B(I,J) \quad \begin{matrix} (J=1,2,\dots,Nc) \\ (I=1,2,\dots,Nr) \end{matrix}$$

10 . 矢印は1種である

$$bL(I,J)+bR(I,J)+bU(I,J)+bD(I,J) = 1 \quad \begin{matrix} (J=1,2,\dots,Nc) \\ (I=1,2,\dots,Nr) \end{matrix}$$

11 . 白マスに矢印は付かない

$$bL(I,J)+bR(I,J)+bU(I,J)+bD(I,J)+W(I,J) = 1 \quad \begin{matrix} (J=1,2,\dots,Nc) \\ (I=1,2,\dots,Nr) \end{matrix}$$

12 . 矢印は白マスに向かない

$$\begin{matrix} bL(I,J)+W(I,J-1) & 1 & (J=1,2,\dots,Nc) \\ bR(I,J)+W(I,J+1) & 1 & (I=1,2,\dots,Nr) \\ bU(I,J)+W(I-1,J) & 1 & \\ bD(I,J)+W(I+1,J) & 1 & \end{matrix}$$

13 . 外枠から外へ向かう矢印はない

$$\begin{matrix} \sum_{J=1}^{Nc} bU(1,J) & = & 0 \\ \sum_{J=1}^{Nc} bD(Nr,J) & = & 0 \\ \sum_{I=1}^{Nr} bL(I,1) & = & 0 \\ \sum_{I=1}^{Nr} bR(I,Nc) & = & 0 \end{matrix}$$

1 4 . 矢印の向かい合わせ衝突禁止

$$\begin{array}{ll} bL(I,J)+bR(I,J-1) & 1 \quad (J=1,2,\dots,Nc) \\ bR(I,J)+bL(I,J+1) & 1 \quad (I=1,2,\dots,Nr) \\ bU(I,J)+bD(I-1,J) & 1 \\ bD(I,J)+bU(I+1,J) & 1 \end{array}$$

1 5 . 集水マスはどこかにある

$$\sum_{I=1}^{Nr} \sum_{J=1}^{Nc} C(I,J) = 1$$

1 6 . 集水マスは白マスにはない

$$C(I,J)+W(I,J-1) \quad 1 \quad \begin{array}{l} (J=1,2,\dots,Nc) \\ (I=1,2,\dots,Nr) \end{array}$$

1 7 . 矢印に番号を付ける (スタート点 = 集水マスを 1 番とする)

$$\begin{array}{ll} N(I,J)+bigM\{1-C(I,J)\} & 1 \quad (J=1,2,\dots,Nc) \\ N(I,J) & 1+bigM\{1-C(I,J)\} \quad (I=1,2,\dots,Nr) \end{array}$$

1 8 . 矢印に番号を付ける (一般部)

$bR(I,J-1) = 1$ のとき $N(I,J)+1 = N(I,J-1)$
すなわち矢印は根本側が大きくなるように付番する。

ビッグMを使って

$$\begin{array}{ll} N(I,J)+1 & N(I,J-1)+bigM\{1-bR(I,J-1)\} \quad (I=1,2,\dots,Nr) \\ N(I,J)+1+bigM\{1-bR(I,J-1)\} & N(I,J-1) \quad (J=1,2,\dots,Nc) \end{array}$$

同様に

$$\begin{array}{ll} N(I,J)+1 & N(I,J+1)+bigM\{1-bL(I,J+1)\} \\ N(I,J)+1+bigM\{1-bL(I,J+1)\} & N(I,J+1) \\ N(I,J)+1 & N(I-1,J)+bigM\{1-bD(I-1,J)\} \\ N(I,J)+1+bigM\{1-bD(I-1,J)\} & N(I-1,J) \\ N(I,J)+1 & N(I+1,J)+bigM\{1-bU(I+1,J)\} \\ N(I,J)+1+bigM\{1-bU(I+1,J)\} & N(I+1,J) \end{array}$$

上下界

bounds

変数型

binary

$$\begin{array}{ll} B(I,J) & W(I,J) \quad (I=1,2,\dots,Nr) \\ bL(I,J) & bR(I,J) & bU(I,J) & bD(I,J) \quad (J=1,2,\dots,Nc) \\ C(I,J) & \\ T(K,L,M) & (K=1,2,\dots,Nf) \\ & (L=1,2,\dots,N(K)) \\ & (M=1,2,\dots,8) \end{array}$$

general

$$\begin{array}{ll} N(I,J) & (I=1,2,\dots,Nr) \\ & (J=1,2,\dots,Nc) \end{array}$$

終端

end